

Zur Berechnung elektrostatischer Linsen

Von U. TIMM

Aus dem Physikalischen Staatsinstitut Hamburg

(Z. Naturforsch. **10a**, 593—602 [1955]; eingegangen am 11. Juni 1955)

Es wird gezeigt, daß sich die Matrizenendarstellung, die sehr häufig zur rechnerischen Behandlung von Vierpollinsen angewandt wird, z. B. ^{1, 2}, mit Vorteil auch auf rotationssymmetrische und ebene elektrostatische Felder übertragen läßt. Die Integration der Bahngleichung von geladenen Teilchen in elektrischen Feldern nach der G a n s s e n Methoden wird in Matrizenform geschrieben. Das dabei entstehende Matrizenprodukt, in der richtigen Reihenfolge ausmultipliziert, läßt dann sogleich alle charakteristischen Eigenschaften einer Linse erkennen. Das allgemeine Verhalten mehrerer hintereinander geschalteter Linsen kann jetzt in übersichtlicher Weise angegeben werden. Außerdem wird gezeigt, wie man den Matrizenkalkül auch zur numerischen Berechnung der charakteristischen Daten eines Linsensystems verwenden kann. Dabei werden insbesondere die Linsensysteme ins Auge gefaßt, die zur ersten Fokussierung in Teilchenbeschleunigern wie Van de Graaff- oder Kaskadengeneratoren dienen.

Über die Eigenschaften elektrostatischer Rohrlinsen liegt bereits eine große Zahl von experimentellen und theoretischen Arbeiten vor, da diese zylindersymmetrischen Felder in der Elektronen- und Ionenoptik in großem Umfang Verwendung finden. Desgleichen, wenn auch nicht so häufig, sind Arbeiten über das Verhalten von Schlitzlinsen mit ebenen Feldern veröffentlicht, die vor allem in Massenspektrometern und ähnlichen Apparaturen eingebaut werden. Diese Arbeiten befassen sich aber vorwiegend mit dem Verhalten der einzelnen Linse. Es soll hier gezeigt werden, wie man durch eine Vereinfachung der Methode von G a n s ³, durch stückweise lineare Approximation des Achsenpotentials die Bahngleichung zu lösen, auch Kombinationen von Linsen bequem behandeln kann. Die Integration wird durch eine Folge von Matrizenmultiplikationen ersetzt, so daß sich am Ende die gesamte Linsenkombination wieder als eine Matrix darstellt, deren vier Elemente alle wichtigen Linseneigenschaften enthalten. Man kann dann einerseits das allgemeine Verhalten einer Linsenkombination bei variablen Linsenspannungen verfolgen. Dabei ergibt sich z. B. der praktisch wichtige Fall, daß man durch Anwendung einer Folge von Beschleunigungs- und Verzögerungslinsen mit wesentlich kleineren Linsenspannungen auskommt als bei einer Einzellinse. Andererseits können die Matrizen zur numerischen Berechnung einer Linsenkombination herangezogen werden, wobei die Genauigkeit durch immer feinere

Unterteilung der Schritte beliebig gesteigert werden kann. Ein Beispiel für eine solche Berechnung eines rotationssymmetrischen Linsensystems soll in dem folgenden Aufsatz gegeben werden.

I. Die charakteristischen Linsenelemente

1. Bezeichnungen

Es soll der Fall betrachtet werden, daß Ionen mit der Eintrittsenergie eV_1 irgend ein fokussierendes elektrisches Feld der Länge K durchlaufen. Das Ion bewege sich in z -Richtung, also in Abb. 1 von links nach rechts. Abb. 1 zeigt die Bahn eines im Abstand E vom Linseneingang ausgehenden Ions, das im Abstand A vom Linsenausgang die Achse wieder schneidet. Bild und Objekt sollen im feldfreien Raum liegen. Das Linsenfeld habe die Länge K . Das Ion tritt

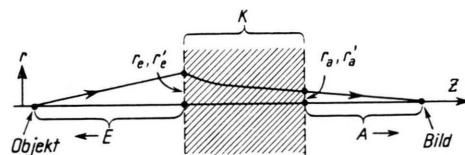


Abb. 1. Linse und Strahlengang, schematisch.

im Abstand r_e von der Achse und mit der Neigung $r'_e = (dr/dz)_e$ in die Linse ein und kommt im Abstand r_a mit r'_a wieder heraus. E und A sollen in Pfeilrichtung positiv gerechnet werden.

¹ L. Smith u. R. Gluckstern, Rev. Sci. Instrum.

25, 220 [1955].

² L. A. Pipes, J. Appl. Phys. **24**, 902 [1953].

³ R. G a n s , Z. techn. Phys. **18**, 41 [1937].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Die Abb. 2 und 3 zeigen den sogenannten I. und II. Hauptstrahl, d. h. parallel zur z -Achse einfallende ($r_e' = 0$) oder ausgehende ($r_a' = 0$) Ionen. Durch sie werden die Brennpunkte F_a und F_e in bekannter

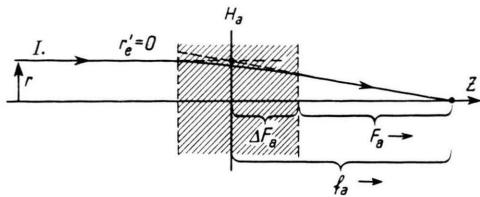


Abb. 2. Lage des bildseitigen Brennpunktes.

Weise definiert, ebenfalls die Lage der Hauptebenen H_a und H_e als Abstand des Schnittpunktes der nach rückwärts und vorwärts verlängerten geraden Bahnstücke im feldfreien Raum vom Linsenausgang bzw.

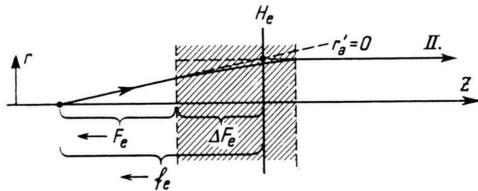


Abb. 3. Lage des objektseitigen Brennpunktes.

-eingang. ΔF_a soll wie F_a nach rechts positiv gezählt werden, ist also in Abb. 2 negativ. Entsprechendes gilt für ΔF_e . Die von den Hauptebenen ab gerechneten Brennweiten f_a und f_e ergeben sich dann als die Differenz

$$f = F - \Delta F. \quad (1)$$

Durch die vier Größen $f_a, f_e; \Delta F_a, \Delta F_e$ ist die Abbildungseigenschaft der Linse vollständig beschrieben, wobei man je zwei auch gegen F_a, F_e austauschen kann.

2. Matrizendarstellung

Ein- und ausgehender Strahl werden durch r_e, r_e' bzw. r_a, r_a' beschrieben. Man kann zeigen⁴, daß sich r_a, r_a' als Linearkombination von r_e, r_e' schreiben lassen:

$$\begin{aligned} r_a &= a_{11} r_e + a_{12} r_e', \\ r_a' &= a_{21} r_e + a_{22} r_e' \end{aligned} \quad \text{oder } \mathbf{r}_a = \mathfrak{U} \mathbf{r}_e \text{ mit } \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

wo $\mathbf{r}_{a,e}$ Vektoren mit den Komponenten $r_{a,e}$ und $r_{a,e}'$ sein sollen. Die inverse Beziehung dazu lautet:

⁴ K. Spangenberg, Vacuum Tubes, McGraw-Hill 1948, S. 328 ff.

$$\mathbf{r}_e = \mathfrak{U}^{-1} \mathbf{r}_a \text{ mit } \mathfrak{U}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$D = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.$$

Damit ist die Linse durch die vier Matrixelemente a_{11} bis a_{22} dargestellt, deren Beziehung zu den vier charakteristischen Elementen sich leicht ausrechnen läßt. Aus Abb. 2 und 3 liest man ab, daß

$$\begin{aligned} F_a &= -r_a/r_a' \text{ für } r_e' = 0, \quad F_e = r_e/r_e' \text{ für } r_a' = 0, \\ \Delta F_a &= -\frac{r_e - r_a}{r_a} \cdot F_a \text{ für } r_e' = 0, \\ \Delta F_e &= -\frac{r_a - r_e}{r_e} \cdot F_e \text{ für } r_a' = 0. \end{aligned}$$

Damit erhält man aus (2) und (3)

$$\begin{aligned} F_a &= -\frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad \Delta F_a = \frac{1-a_{11}}{a_{21}}, \quad f_a = -\frac{1}{a_{21}}, \\ F_e &= -\frac{a_{22}}{a_{21}}, \quad \Delta F_e = \frac{D-a_{22}}{a_{21}}, \quad f_e = -\frac{D}{a_{21}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Man kann jetzt die Matrizen (2) und (3) durch Ausklammern von $-a_{21}$ auch in folgender Weise schreiben:

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{f_a} \begin{pmatrix} F_a & f_a & f_e & -F_a & F_e \\ -1 & F_e & F_e & F_a & F_a \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{U}^{-1} = \frac{1}{f_e} \begin{pmatrix} F_e & F_a & F_e & -f_a & f_e \\ 1 & F_a & F_a & F_e & F_e \end{pmatrix}, \quad (5)$$

worin die Beziehung $-(a_{12}/a_{21}) = f_a f_e - F_a F_e$ aus (4) leicht abzuleiten ist. Man sieht aus (4) außerdem, daß $f_a = f_e$ für $D = 1$ und $F_a = F_e$ für $a_{11} = a_{22}$ ist.

3. Abbildungsgleichungen

Die Matrixelemente sind Funktionen der Linsenspannungen, deren Ermittlung erst im folgenden Abschnitt behandelt wird. Hier sollen zunächst die Abbildungseigenschaften allgemein angegeben werden, wie sie sich aus der Matrixdarstellung ergeben. Die Abbildungsgleichung läßt sich aus (2) berechnen: Für ein Ion, das von der Achse ausgeht, gilt allgemein nach Abb. 1:

$$E = r_e/r_e', \quad A = -r_a/r_a',$$

also nach (2)

$$A = -\frac{a_{11} E + a_{12}}{a_{21} E + a_{22}} = \frac{E F_a - a_{12}/a_{21}}{E - F_e}.$$

Führt man $E' = E - F_e$ und $A' = A - F_a$ als neue Objekt- und Bildkoordinaten ein, so erhält man die bekannte Hyperbelgleichung der Optik

$$A' E' = f_a f_e = F_a F_e - \frac{a_{12}}{a_{21}} = \frac{D}{a_{21}^2}. \quad (6)$$

Häufig wird, um den Durchmesser des Ionenbündels am Ausgang der Linse zu berechnen, das Verhältnis

r_e/r_a für einen Randstrahl gebraucht. Aus (2) bzw. (3) folgt

$$\frac{r_a}{r_e} = a_{11} + a_{12} \frac{1}{E}; \quad \frac{r_e}{r_a} = \frac{a_{22}}{D} + \frac{a_{12}}{D} \frac{1}{A}. \quad (7)$$

Endlich interessiert noch die Vergrößerung, die definiert wird durch $M = (r_{\text{Bild}}/r_{\text{Objekt}})$. Da alle von O ausgehenden Ionen wieder in B vereinigt werden (Abb. 4), genügt es, speziell z. B. einen Strahl, der mit $r_e = 0$ eintritt, zu betrachten. Dann kann man aus Abb. 4 folgende Beziehungen ablesen:

$$r_e' = -\frac{r_{\text{Objekt}}}{E} \rightarrow r_{\text{Objekt}} = -r_e' E; \\ r_a' = \frac{r_{\text{Bild}} - r_a}{A} \rightarrow r_{\text{Bild}} = A r_a' + r_a.$$

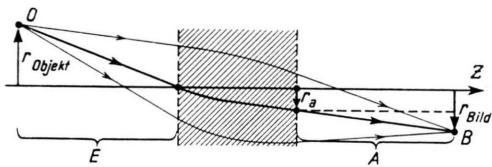


Abb. 4. Zur Ableitung der Vergrößerung, schematisch.

Aus (2) folgt dann $r_a = a_{12} r_e'$ und $r_a' = a_{22} r_e'$. Setzt man dieses in M ein, so erhält man nach kurzer Rechnung, in der E unter Benutzung von Gl. (5) eliminiert wird, die aus der Optik bekannte Beziehung

$$M = a_{21} A + a_{11} = a_{21} A' = -A'/f_a. \quad (8)$$

Negatives M bedeutet dabei ein umgekehrtes Bild, was aber für diese Betrachtungen nicht von Bedeutung ist. Für $1/M$ gilt wegen der Umkehrbarkeit des Strahlenganges entsprechend

$$\frac{1}{M} = \frac{a_{21}}{D} E + \frac{a_{22}}{D} = \frac{a_{21}}{D} E' = -\frac{E'}{f_e}. \quad (8a)$$

Damit sind die wesentlichen Eigenschaften der Linse mit den Matrixelementen dargestellt.

II. Rohrlinsen. (Rotationssymmetrische Felder)

1. Kurze Darstellung der Gans'schen Integrationsmethode

Gegeben ist ein rotationssymmetrisches Potentialfeld $\varphi(r, z)$, das etwa durch zwei Rohre, die auf verschiedenem Potential liegen, realisiert wird (Abb. 5). Die Bahngleichung $r(z)$ eines Ions, das sich in

einer Meridianebebene in z -Richtung bewegt, folgt aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung⁵. Sie lautet:

$$r'' = \frac{1+r'^2}{2\varphi} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial r} - r' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\}, \quad r' = \frac{dr}{dz}; \quad (9)$$

darin ist $\varphi(r, z)$ entweder durch die Potentiale V_1 , V_2 der Elektroden oder durch das Potential auf der Achse $\varphi(0, z) \equiv \varphi(z)$ vollständig bestimmt, wegen der Potentialgleichung $\Delta \varphi(r, z) = 0$. Wir denken uns $\varphi(z)$ für $r=0$ bekannt und entwickeln $\varphi(r, z)$ in der üblichen Weise nach Potenzen von r ⁵:

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{(2n)}(z)}{(n!)^2} \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \\ = \varphi(z) - \frac{r^2}{4} \varphi''(z) + \frac{r^4}{64} \varphi^{IV}(z) \pm \dots \quad (10)$$

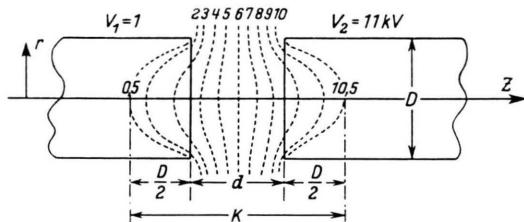


Abb. 5. Meridianschnitt einer Rohrlinse, schematisch.

Setzt man (10) in (9) ein und berücksichtigt nur Glieder erster Ordnung in r und r' , so erhält man mit

$$r'' = -\frac{\varphi'}{2\varphi} r' - \frac{\varphi''}{4\varphi} r \quad (11)$$

eine Differentialgleichung für $r(z)$, deren Lösung nur für kleine r, r' gültig ist (flache achsennahe Strahlen). Dieser Bereich ist es aber auch gerade, der eine Abbildung im Sinne des Abschnitts II vermittelt. In Bereichen, wo Glieder mit r^2, r'^2 nicht zu vernachlässigen sind, treten Bildfehler auf, die aber in Kernbeschleunigungsapparaten von geringerem Interesse sind, da eine absolut scharfe Abbildung der Ionenquelle meist nicht nötig ist.

Nach Gans³ approximiert man $\varphi(z)$, das man etwa durch Messung im elektrolytischen Trog erhal-

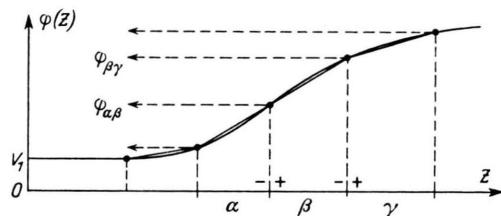


Abb. 6. Approximation des Achsenpotentials $\varphi(z)$.

⁵ V. K. Zworykin, Electron Optic and the Electron Microscope, Wiley & Sons N. Y. 1946.

ten hat, durch einen Polygonzug wie in Abb. 6. Die Integration von Gl. (11) geschieht dann in zwei Schritten:

a) Integration über das Segment β :

$$\varphi'' = 0 \rightarrow V\varphi' r' = C_\beta, \text{ also } C_\beta = V\varphi_{\alpha\beta} r'_{\alpha\beta+};$$

damit folgt nach nochmaliger Integration

$$r_{\beta\gamma-} = r_{\alpha\beta+} + \frac{2\varphi_{\alpha\beta}}{\varphi'_\beta} \left\{ \sqrt{\frac{\varphi_{\beta\gamma}}{\varphi_{\alpha\beta}}} - 1 \right\} r'_{\alpha\beta+} \quad \text{für } \varphi'_\beta \neq 0 \quad (12a)$$

[durch $r'_{\beta\gamma+}$ soll die Steigung kurz vor (-) und hinter (+) dem Eckpunkt $\beta\gamma$ gekennzeichnet sein, $r_{\beta\gamma+} = r_{\beta\gamma-}$].

b) Integration über die Ecke $\beta\gamma$:

$$\varphi'' \rightarrow \infty, \text{ aber } \varphi, \varphi', r, r' \text{ endlich}$$

$$\rightarrow \int_{z_{\beta\gamma-}}^{z_{\beta\gamma+}} r'' dz = - \int_{z_{\beta\gamma-}}^{z_{\beta\gamma+}} \frac{\varphi''}{4\varphi} r dz,$$

daraus

$$r'_{\beta\gamma+} = r'_{\beta\gamma-} + \frac{r_{\beta\gamma-}}{4\varphi_{\beta\gamma}} \left\{ \varphi'_{\beta\gamma-} - \varphi'_{\beta\gamma+} \right\}. \quad (13a)$$

Man sieht leicht, wie man diese Gleichungen vervollständigen muß, um auf die Form der Gl. (2) zu kommen. Die zu (12a) noch fehlende Gleichung für $r'_{\beta\gamma-}$ erhält man aus $C_\beta = V\varphi' r'$:

$$r'_{\beta\gamma-} = \frac{C_\beta}{V\varphi_{\beta\gamma}} = \sqrt{\frac{\varphi_{\alpha\beta}}{\varphi_{\beta\gamma}}} r'_{\beta\gamma-}, \quad (12b)$$

während Gl. (13a) vervollständigt wird durch die Identität

$$r_{\beta\gamma+} = r_{\beta\gamma-}. \quad (13b)$$

Dann kann man für die Integration über ein Segment schreiben:

$$r_{\beta\gamma-} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\varphi_{\alpha\beta}}{\varphi'_\beta} \left\{ \sqrt{\frac{\varphi_{\beta\gamma}}{\varphi_{\alpha\beta}}} - 1 \right\} \\ 0 & \sqrt{\frac{\varphi_{\alpha\beta}}{\varphi_{\beta\gamma}}} \end{pmatrix} r_{\alpha\beta+} \quad \text{für } \varphi'_\beta \neq 0 \quad (12)$$

und für die Integration über eine Ecke:

$$r_{\beta\gamma+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi'_{\beta\gamma-} - \varphi'_{\beta\gamma+}}{4\varphi_{\beta\gamma}} & 1 \end{pmatrix} r_{\beta\gamma-}. \quad (13)$$

Zur Vervollständigung von Gl. (12) kann man noch die Bewegung eines Ions im feldfreien Raum, $\varphi'_\beta = 0$, angeben. Es gilt:

$$r_{\beta\gamma-} = \begin{pmatrix} 1 & K_\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} r_{\alpha\beta+} \quad \text{für } \varphi'_\beta = 0, \quad (14)$$

wie man leicht an Hand der Abb. 7 verifiziert.

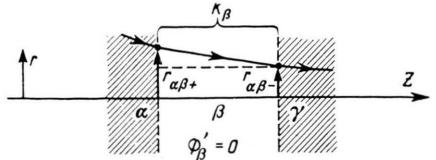


Abb. 7. Bahn eines Ions im feldfreien Raum.

2. Anwendung auf einfache Rohrlinsen

Die erste Näherung für eine Rohrlinse ist die, daß man das Achsenpotential $\varphi(z)$ durch eine Gerade ersetzt, und damit die Linse wie in Abb. 8 in drei Gebiete aufteilt, deren Felder nacheinander $\varphi'_a = 0$, $\varphi'_b = \text{const}$, $\varphi'_c = 0$ sind⁶. Die Potentiale V_i der Linsen sind immer bezogen auf die kinetische Energie Null der Ionen. Mit den Bezeichnungen von Abb. 6 wäre dann:

$$\varphi_{\alpha\beta} = V_1, \varphi_{\beta\gamma} = V_2, \varphi'_\beta = (V_2 - V_1)/K, \varphi'_a = \varphi'_c = 0.$$

φ' sei positiv in Beschleunigungsrichtung. Es sei noch $N = V_2/V_1$ der Energiegewinn in der Linse, N ist stets positiv. Jetzt drücken wir nach Gl. (12) $r_{\beta\gamma+}$ durch $r_{\beta\gamma-}$ aus, dann wieder nach (12) $r_{\beta\gamma-}$ durch $r_{\alpha\beta+}$ usw. Zum Schluß werde noch $r_{\beta\gamma+} \equiv r_{\beta\gamma-}$

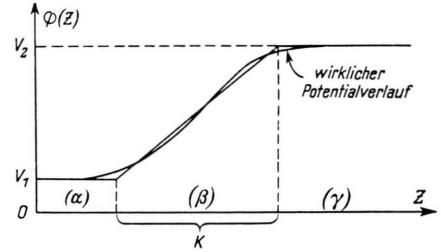


Abb. 8. Einfachste Approximation der Rohrlinse.

und $r_{\alpha\beta-} \equiv r_e$ gesetzt, um auf die Bezeichnungen des Abschnitts I, 1 zu kommen. Man sieht, daß die Integration der Bahngleichung jetzt in ein Matrizenprodukt der folgenden Form überführt ist:

$$\mathbf{r}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{N-1}{4KN} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2K}{VN+1} \\ 0 & \frac{1}{VN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{N-1}{4K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_e. \quad (15)$$

Wenn man von rechts ausmultipliziert, erhält man die Abbildungsmatrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(VN-3) & \frac{2K}{VN+1} \\ -\frac{3(N-1)(VN-1)}{8KN} & \frac{3VN-1}{2N} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

aus der nun alle charakteristischen Linseneigenschaften abgelesen werden können. Die Determinante D

⁶ M. Elkind, Rev. Sci. Instrum. **24**, 129 [1953].

ist $D = 1/\sqrt{N}$, wie man aus der Produktdarstellung (15) der Matrix erkennt.

Nach (4) bekommt man zunächst für die Brennweiten und Hauptebenenabstände in Einheiten der Linsenlänge K :

$$\begin{aligned} \frac{F_a}{K} &= -\frac{4}{3} \frac{N}{N-1} \frac{\sqrt{N}-3}{\sqrt{N}-1}, \quad \frac{F_e}{K} = \frac{4}{3} \frac{1}{N-1} \frac{3\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}-1}, \\ \frac{\Delta F_a}{K} &= -\frac{4}{3} \frac{N}{N-1}, \quad \frac{\Delta F_e}{K} = \frac{4}{3} \frac{1}{N-1}, \quad (17) \\ \frac{f_a}{K} &= \frac{8}{3} \frac{N}{(N-1)(\sqrt{N}-1)}, \quad \frac{f_e}{K} = \frac{8}{3} \frac{\sqrt{N}}{(N-1)(\sqrt{N}-1)}. \end{aligned}$$

F_a/K und F_e/K sind in ihrer Abhängigkeit von N in Abb. 9 aufgetragen.

einandergeschalteter Linsen, wie aus dem Folgenden noch ersichtlich sein wird, und zeigt darum auch noch das Matrixelement

$$(f_a f_e - F_a F_e)/K^2 = (16/3) \cdot \{N/(N-1)^2\}$$

aus der Darstellung (5), sowie den zur Ermittlung der Vergrößerung wichtigen Faktor K/f_a , deren Hauptwerte auch in Tab. 1 aufgetragen sind. Die zu (6) analoge Form der Abbildungsgleichung ist

$$\frac{A'}{K} \frac{E'}{K} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \frac{N \sqrt{N}}{(N-1)^2 (\sqrt{N}-1)^2} = \frac{f_a f_e}{K^2}, \quad (18)$$

Ihr qualitativer Verlauf für irgendein festes N ist in Abb. 10 gezeigt, aus der man ersieht, wie A mit E

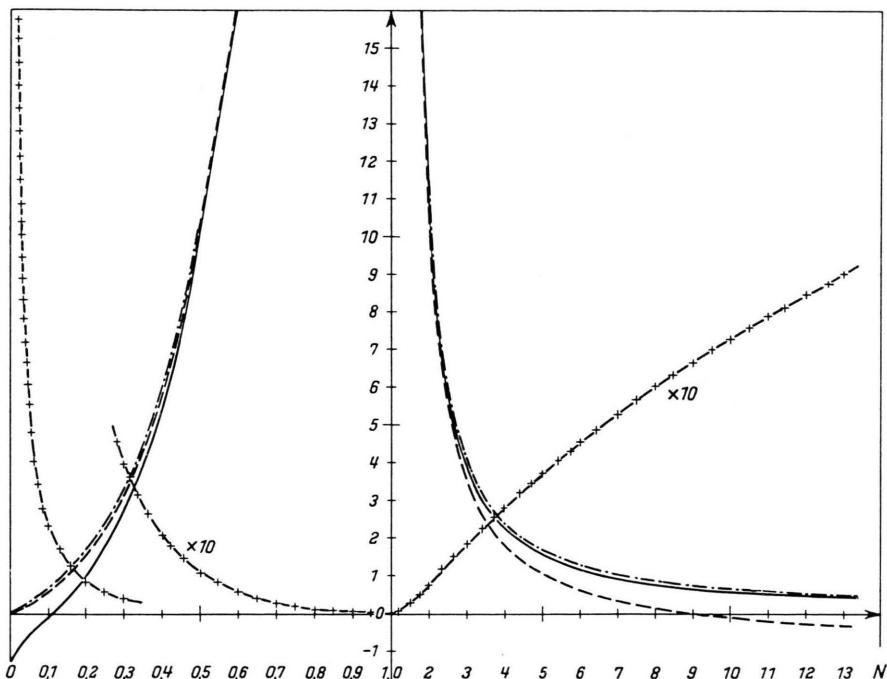


Abb. 9. Charakteristische Daten der idealisierten Rohrlinse in Abhängigkeit von N . Ordinate: — F_e/K ; - - - F_a/K ; - · - - $(f_a f_e - F_a F_e)/K^2$; - × - × - K/f_a .

Die Kurven gestatten eine schnelle Beurteilung der Fokussierungseigenschaften einer Linse mit bekanntem N und K . Da sich alle charakteristischen Größen, insbesondere auch E und A , proportional mit K vergrößern, muß man K so klein wie möglich wählen. Einige charakteristische Werte für F_e/K und F_a/K sind in Tab. 1 noch einmal eingetragen. Es ist

$$F_a \approx F_e \text{ für } 0,4 < N < 2,5.$$

Abb. 9 ist die Grundlage zur Berechnung des noch gesondert zu behandelnden Falles mehrerer hinter-

N	0	$\frac{1}{9}$	1	9	∞		
F_e/K	$-\frac{4}{3}$	0	$+\infty$	$\approx 0,7$	0		
F_a/K	0	$\approx 0,7$	$+\infty$	0	$-\frac{4}{3}$		
$(f_a f_e - F_a F_e)/K^2$	0	$\approx 0,7$	$+\infty$	$\approx 0,7$	0		
N	0	0,2	0,5	1	2	15	∞
K/f_a	$+\infty$	≈ 1	$\approx 0,1$	0	$\approx 0,1$	≈ 1	$+\infty$

Tab. 1.

variiert. Außerdem kann man sich noch überlegen, wie A mit N variiert, wenn man E festhält. Damit bekommt man Einblick in die Funktion einer Linse,

deren Spannung verändert wird, während Objektweite und Energie der eintretenden Ionen konstant bleibt. Derartige Kurven finden sich z. B. bei Elkind⁶.

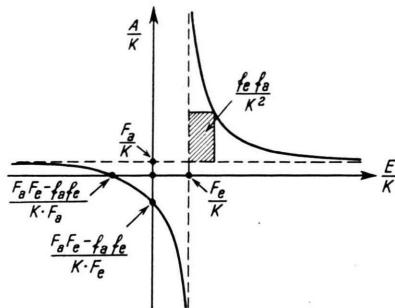


Abb. 10. Variation von Bild- und Objektweite bei festem N .

Für den trivialen Fall $N = 1$ liegen selbstverständlich Bild und Objekt am gleichen Ort, also $A/K = -(E + K)/K$, wie man aus (18) leicht bestätigt, wenn man berücksichtigt, daß $F_a/K = F_e/K = (f_a f_e - F_a F_e)/K^2$ für $N = (1 + \delta) \rightarrow 1$. Mit wachsendem N geht A/K gegen $-\infty$. Dabei durchschreitet ΔF_e , da die Hauptebenenabstände, wie man aus (17) ersieht, kleiner werden, den Punkt $F_e(N) = E$ oder $E' = -f_e$, wozu nach der Abbildungsgl. (18) $A' = -f_a$ gehört, d. h. das (virtuelle) Bild liegt auf der bildseitigen Hauptebene H_a . Wenn N weiter wächst, erreicht A' bzw. A bei $F_e(N) = E$ den Wert $\mp\infty$. Für alle größeren N -Werte erzeugt die Linse jetzt reelle Bilder, $A > 0$. Mit weiter steigendem N wächst die Brechkraft der Linse, d. h. A wird kleiner, bleibt aber stets größer als F_a . Der Wert $A = 0$ wird erreicht bei einem Wert $N = N_0$, der sich berechnet aus

$$-\frac{(f_a f_e - F_a F_e)/K^2}{F_a/K} = \frac{4}{(VN_0+1)(VN_0-3)} = \frac{E}{K}.$$

Wächst N noch weiter, so wird $A/K \approx F_a/K \rightarrow -4/3$ mit $N \rightarrow \infty$.

Für $N < 1$ ist der Verlauf ganz ähnlich: Mit $N = 1$ beginnend geht A/K von $A/K = -(E + K)/K$ bis $A/K = \mp\infty$ bei $F_e(N) = E$. Von da ab erzeugt die Linse wieder reelle Bilder, deren Bildweiten von $A = \infty$ bis $A = 0$ wandern, wenn N bis zum Wert Null geht.

Nach Gl. (7) wird das Verhältnis von Austritts- zu Eintrittsradius eines Ionenstrahls jetzt

$$\frac{r_a}{r_e} = -\frac{\sqrt{N}-3}{2} + \frac{2}{\sqrt{N}+1} \frac{K}{E}. \quad (19)$$

Kurven hierzu sind in der Arbeit von Elkind⁶ zu finden. Gl. (8) für die Vergrößerung lautet jetzt

$$M = -\frac{3}{8N} (N-1) (\sqrt{N}-1) \frac{A'}{K} = -\frac{K}{f_a} \frac{A'}{K}. \quad (20)$$

M kann unter Verwendung der Kurve für K/f_a aus Abb. 9 leicht berechnet werden.

Eine wesentliche Eigenschaft der Linse erhält man noch, wenn man in den Formeln (17) N durch $1/N$ ersetzt:

$$F_a(1/N) = F_e(N), \quad \Delta F_a(1/N) = \Delta F_e(N), \\ f_a(1/N) = f_e(N). \quad (21)$$

Daraus folgt, daß sich die Produkte $f_a f_e$ und $F_a F_e$ bei der Ersetzung nicht ändern. Die Gl. (21) drückt die auch in der Lichtoptik bekannte Umkehrbarkeit des Strahlenganges aus.

Das Verhalten der nach Abb. 8 idealisierten Linse ist damit vollständig beschrieben. Die Approximation scheint zunächst sehr grob, ist aber, wie bei Elkind⁶ gezeigt wird, in den meisten Fällen völlig ausreichend; vor allem deshalb, weil die Elektrodenspannungen meist doch variiert werden. Dasselbe wird auch aus dem im folgenden Aufsatz gegebenen Anwendungsbeispiel klar werden.

Für die praktische Anwendung der Formeln ist noch wesentlich, wie sich die Länge des Feldes K zu den wirklichen Elektrodendimensionen etwa verhält. Den Potentialverlauf für die verschiedensten Elektrodenformen findet man in der Literatur^{5, 7, 4}. Ungefähr gilt mit den Bezeichnungen von Abb. 11, daß $K \approx d + D$ ist, d. h. durch Verkürzung des Elektrodenabstandes kommt man höchstens auf $K \approx D$. Man hat damit die Möglichkeit, auch ohne genaue Kenntnis des Achsenpotentials eine überschlagsmäßige Berechnung der Linse vorzunehmen.

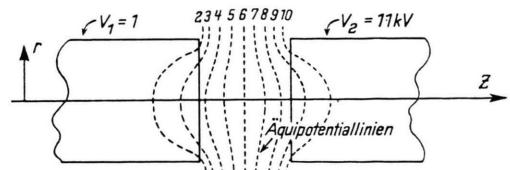


Abb. 11. Typischer Verlauf der Äquipotentialflächen in einer Rohrlinse.

2. Kombination mehrerer Linsen

Wie in der Lichtoptik, kann man auch hier durch Hintereinanderschalten mehrerer Linsen die Brech-

⁷ W. Glaeser, Grundlagen der Elektronenoptik, Springer, Wien 1952, S. 315 ff.

kraft steigern. Die Gesetzmäßigkeiten dabei sollen im folgenden unter Ausnutzung der oben entwickelten Matrizendarstellung angegeben werden. Dazu ist es zweckmäßig, die Abbildungsmatrizen in der Form (5) zu betrachten.

Abb. 12 zeigt den Potentialverlauf auf der Achse irgend zweier aufeinander folgender wie in Abb. 8 idealisierter Linsen. Die Gesamtabbildungsmatrix dieser im Abstand K_{12} hintereinandergeschalteter Linsen stellt sich wieder als Produkt der einzelnen Matrizen dar, nämlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}_2 \begin{pmatrix} 1 & K_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{1}{f_{a1} f_{a2}} \begin{pmatrix} F_{a2} & f_{a2} f_{e2} - F_{a2} F_{e2} \\ -1 & F_{e2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & K_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{a1} & f_{a1} f_{e1} - F_{a1} F_{e1} \\ -1 & F_{e1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{F_{a1} + F_{e2} - K_{12}}{f_{a1} f_{a2}} \begin{pmatrix} F_{a2} - \frac{f_{a2} f_{e2}}{F_{a1} + F_{e2} - K_{12}} & -F_{a2} f_{a1} f_{e1} + \frac{F_{a2} f_{a1} f_{e1} + F_{e1} f_{a2} f_{e2}}{F_{a1} + F_{e2} - K_{12}} \\ -1 & F_{e1} - \frac{f_{a1} f_{e1}}{F_{a1} + F_{e2} - K_{12}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man erhält damit für die Gesamtlinse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_a} &= \frac{f_{a1} + f_{e2} - \{K_{12} - (\Delta F_{a1} + \Delta F_{e2})\}}{f_{a1} f_{a2}} = \frac{1}{f_{a2}} \left(1 + \frac{f_{e2} - \Delta}{f_{a1}} \right), \\ \frac{1}{f_e} &= \frac{f_{a1} + f_{e2} - \{K_{12} - (\Delta F_{a1} + \Delta F_{e2})\}}{f_{e1} f_{e2}} = \frac{1}{f_{e1}} \left(1 + \frac{f_{a1} - \Delta}{f_{e2}} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

mit $\Delta \equiv K_{12} - (\Delta F_{a1} + \Delta F_{e2})$.

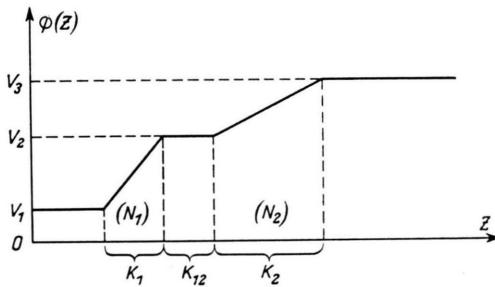


Abb. 12. Hintereinanderschaltung zweier Linsen.

Im Zähler steht die Summe der einander zugewandten Brennweiten der Einzellinsen, vermindert um den Abstand Δ der zugehörigen Hauptebenen. Man sieht, daß $f_a < f_{a2}$ und $f_e < f_{e1}$ ist, solange $\Delta < f_{a1}, f_{e2}$ ist, die Brechkraft wird also verstärkt. Ferner gilt:

$$F_a = F_{a2} - \frac{f_{a2} f_{e2}}{F_{a1} + F_{e2} - K_{12}}, \quad F_e = F_{e1} - \frac{f_{a1} f_{e1}}{F_{a1} + F_{e2} - K_{12}}. \quad (23)$$

Hierin bedeutet $K_{12} - (F_{a1} + F_{e2})$ den Abstand der einander zugewandten Brennpunkte; er muß negativ sein, wenn $F_a < F_{a2}, F_e < F_{e1}$ sein soll.

Für den Spezialfall, daß $N_2 = 1/N_1$ ist, vereinfachen sich die Formeln nach Gl. (21) in folgender Weise (für das gesamte Linsensystem ist dann $N = 1$, kein Energiegewinn):

$$\begin{aligned} f_a &= f_e = \frac{f_{a1} f_{e1}}{2 F_{a1} - K_{12}} \equiv f, \\ F_a &= F_e = F_{e1} - \frac{f_{a1} f_{e1}}{2 F_{a1} - K_{12}} \equiv F, \\ \Delta F_a &= \Delta F_e = F_{e1} - 2f \equiv \Delta F, \end{aligned} \quad (24)$$

so daß $f = (F_{e1} - F)$ ist. Hiermit bekommt man nach (18) und (20)

$$E' A' = (F_{e1} - F)^2, \quad (25)$$

$$M = -A'/f. \quad (26)$$

Solche Linsen sind aus dem Grunde besonders günstig, weil sie eine Erhöhung der Brechkraft erreichen, ohne daß man höhere Potentiale an die Elektroden zu legen braucht, als im Fall einer einfachen Verzögerungs- oder Beschleunigungslinse. Die Gln. (22) und (23) gelten allgemein für alle Linsen mit den unter I, 1 beschriebenen Eigenschaften.

Setzt man in den Gln. (24) bis (26) die Größen $F_{a1}, F_{e1}, f_{a1}, f_{e1}$ aus (15) ein, so erhält man die gleichen Formeln in ihrer expliziten Abhängigkeit von N_1 für Rohrlinsen, wo der Einfachheit halber $K_{12} = 0$ gesetzt ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f}{K} &= -\frac{8}{3} \frac{\sqrt{N_1}}{(N_1-1)(\sqrt{N_1}-1)(\sqrt{N_1}-3)}, \\ \frac{F}{K} &= \frac{4}{3} \frac{3N_1 - 8\sqrt{N_1} + 3}{(N_1-1)(\sqrt{N_1}-1)(\sqrt{N_1}-3)}, \\ \frac{\Delta F}{K} &= \frac{4}{(\sqrt{N_1}+1)(\sqrt{N_1}-3)}, \\ \frac{f}{K} &> 0 \quad \text{für } 0 < N_1 < 9; \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

$$\frac{E' A'}{K} = \left(\frac{8}{3} \right)^2 \frac{N_1}{(N_1-1)^2 (\sqrt{N_1}-1)^2 (\sqrt{N_1}-3)^2}, \quad (25a)$$

$$M = \frac{3}{8\sqrt{N_1}} (N_1-1) (\sqrt{N_1}-1) (\sqrt{N_1}-3) \frac{A'}{K}. \quad (26a)$$

Abb. 13 zeigt den Verlauf von F/K gegenüber F_{e1}/K der Einzellinse für den Fall, daß $K_{12} = 0$ ist. Man kann diese Kurve entweder aus Gl. (24) berechnen unter Benutzung der Werte aus Abb. 9 oder auch direkt aus der expliziten Darstellung (24a). Es ist einzusehen, daß durch Hintereinanderschalten mehrerer solcher Linsen die Brechkraft weiter erhöht

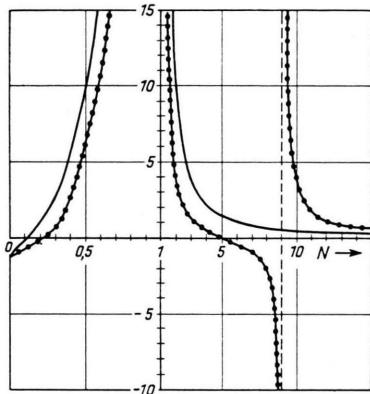


Abb. 13. Verlauf von F/K mit N , verglichen mit F_{e1}/K der Einzellinse, für $K_{12}=0$.
Ordinate: ——— F_{e1}/K ; - - - - - F/K .

wird. Man erkennt aus (23) schließlich noch, daß $f_{a,e}(N)$ und $F_{a,e}(N)$ jetzt Pole an den Stellen N_0 haben, wo $F_{a1}(N_0) + F_{e2}(N_0) = K_{12}$ ist, d. h. die Brennweiten können bei einer Kombination mehrerer Linsen den ganzen Bereich zwischen $+\infty$ und $-\infty$ durchlaufen.

III. Schlitzlinsen (ebene Felder)

1. Bewegungsgleichung

Das Problem ist dem rotationssymmetrischen Fall sehr ähnlich, da sich die Bewegungsgleichungen nur durch einen Zahlenfaktor unterscheiden. Es sollen hier darum nur die typischen Abbildungseigenschaften angegeben werden. Die Kombination mehrerer Linsen läßt sich damit ohne Schwierigkeit vom rotationssymmetrischen Fall auf den ebenen übertragen.

Das Ion bewege sich wieder in z -Richtung. φ ist aber jetzt nur von y und z abhängig und symmetrisch zur xz -Ebene, also

$$\varphi = \varphi(y, z) = \varphi(-y, z). \quad (27)$$

Die Bahngleichung $y(z)$ für ein Teilchen, das sich nur in der yz -Ebene bewegt, leitet sich genau so her wie unter II, 1, so daß man mit $y' = dy/dz$ bekommt

$$y'' = \frac{1+y'^2}{2\varphi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y' \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right). \quad (28)$$

Es sei wieder $\varphi(0, z) \equiv \varphi(z)$ das Potential auf der Symmetrieebene xz . Durch $\varphi(z)$ und die Symmetrieforderung (27) ist $\varphi(y, z)$ eindeutig bestimmt. Man findet als Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} \varphi(y, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi^{(2n)}(z) \frac{y^{2n}}{(2n)!} \\ &= \varphi(z) - \frac{y^2}{2!} \varphi''(z) + \frac{y^4}{4!} \varphi^{IV}(z) - \dots \end{aligned} \quad (29)$$

Setzt man (29) in (28) ein und berücksichtigt nur Glieder erster Ordnung in y und y' , so lautet die Bewegungsgleichung:

$$y'' = -\frac{\varphi'}{2\varphi} y' - \frac{\varphi''}{2\varphi} y. \quad (30)$$

Gl. (30) unterscheidet sich von der entsprechenden Gl. (11) nur durch den zusätzlichen Faktor 2 bei y . Die Lösungen $y(z)$ sind wieder nur für kleine y, y' gültig (flache, „achsennahe“ Strahlen).

Die Integration der Gleichung nach der Gans'schen Methode macht darum keine Schwierigkeiten, man erhält statt (12):

$$\eta_{\beta\gamma-} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2\varphi_{\alpha\beta}}{\varphi_{\beta}' } \left\{ \sqrt{\frac{\varphi_{\beta\gamma}}{\varphi_{\alpha\beta}}} - 1 \right\} \\ 0 & \sqrt{\frac{\varphi_{\alpha\beta}}{\varphi_{\beta\gamma}}} \end{pmatrix} \eta_{\alpha\beta+} \quad \text{für } \varphi_{\beta}' \neq 0 \quad (31)$$

und nach der Integration über eine Ecke $\beta\gamma$ statt (13):

$$\eta_{\beta\gamma+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\varphi'_{\beta\gamma} - \varphi'_{\beta\gamma+}}{2\varphi_{\beta\gamma}} & 1 \end{pmatrix} \eta_{\beta\gamma-}. \quad (32)$$

Schließlich gilt für ein feldfreies Stück wieder wie (14):

$$\eta_{\beta\gamma-} = \begin{pmatrix} 1 & K_{\beta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \eta_{\alpha\beta+} \quad \text{für } \varphi_{\beta}' = 0. \quad (33)$$

2. Linseneigenschaften

Abb. 14 zeigt im Schnitt eine Schlitzlinse, wie sie oft zur Beschleunigung und Fokussierung von Ionen

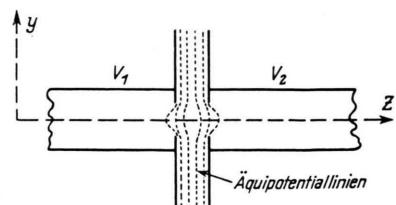


Abb. 14. Schnitt durch eine Schlitzlinse, schematisch.

verwendet wird. Die Schlitze seien in x -Richtung sehr lang. Dann kann man das Potential auf der Achse, $\varphi(z)$, wie in Abb. 8 annähern. Es sollen dieselben Bezeichnungen wie in Abb. 8 gelten. Die Abbildungsgleichung lautet dann:

$$\eta_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{N-1}{2K} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2K}{\sqrt{N+1}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{N}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{N-1}{2K} & 1 \end{pmatrix} \eta_e.$$

Wenn man ausmultipliziert, erhält man statt (16) jetzt:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -(\sqrt{N}-2) & \frac{2K}{\sqrt{N+1}} \\ -\frac{(N-1)(\sqrt{N}-1)}{KN} & \frac{2\sqrt{N}-1}{N} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Es ist wieder $D = 1/\sqrt{N}$. Nun kann man die charakteristischen Linsenelemente nach (4) sofort angeben:

$$\begin{aligned} \frac{F_a}{K} &= -\frac{N}{N-1} \frac{\sqrt{N}-2}{\sqrt{N}-1}, & \frac{F_e}{K} &= \frac{1}{N-1} \frac{2\sqrt{N}-1}{\sqrt{N}-1}, \\ \frac{\Delta F_a}{K} &= -\frac{N}{N-1}, & \frac{\Delta F_e}{K} &= \frac{1}{N-1}, \\ \frac{f_a}{K} &= \frac{N}{(N-1)(\sqrt{N}-1)}, & \frac{f_e}{K} &= \frac{\sqrt{N}}{(N-1)(\sqrt{N}-1)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Die Abhängigkeit der Brennweiten von N ist der der Rohrlinsen, Abb. 9, sehr ähnlich, sie sind nur im Falle der ebenen Felder kürzer, d. h. die Brechkraft ist größer. f_a und f_e sind auch hier stets positiv. Aus (5) folgt die Abbildungsgleichung

$$\frac{A'E'}{K} = \frac{N\sqrt{N}}{(N-1)^2(\sqrt{N}-1)^2} = \frac{f_a f_e}{K^2}. \quad (36)$$

Der Gl. (19) entspricht hier

$$\frac{\eta_a}{\eta_e} = -(\sqrt{N}-2) + \frac{2}{\sqrt{N+1}} \frac{K}{E}. \quad (37)$$

Für die Vergrößerung erhält man nach (7)

$$M = -\frac{1}{N}(N-1)(\sqrt{N}-1) \frac{A'}{K} = -\frac{K}{f_a} \frac{A'}{K}. \quad (38)$$

Auch die Gln. (21) sind im ebenen Falle gültig, wie man leicht nachprüft. Man kann darum auch die Gln. (24) bis (26) für die Hintereinanderschaltung zweier Linsen mit $N_1, N_2 = 1/N_1$ auf ebene Linsen anwenden, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \frac{f}{K} &= -\frac{1}{2(N_1-1)(\sqrt{N_1}-1)(\sqrt{N_1}-2)} \frac{\sqrt{N_1}}{N_1}, \\ \frac{F}{K} &= \frac{1}{2(N_1-1)(\sqrt{N_1}-1)(\sqrt{N_1}-2)} \frac{4N_1-9\sqrt{N_1}+4}{N_1}, \\ \frac{\Delta F}{K} &= \frac{2}{(\sqrt{N_1}+1)(\sqrt{N_1}-2)}, \end{aligned} \quad (24b)$$

$$\frac{E' A'}{K} = \frac{1}{4} \frac{N_1}{(N_1-1)^2(\sqrt{N_1}-1)^2(\sqrt{N_1}-2)^2}, \quad (25b)$$

$$M = -\frac{2}{\sqrt{N_1}} (N_1-1) (\sqrt{N_1}-1) (\sqrt{N_1}-2) \frac{A'}{K}. \quad (26b)$$

Es ist wieder zweckmäßig, sich die Werte für F_a/K , F_e/K , K/f_a und $(f_a f_e - F_a F_e)/K^2$ in einer Tabelle oder graphischen Darstellung zusammenzustellen, die man dann zur Berechnung komplizierterer Systeme benutzen kann.

IV. Numerische Berechnung von Linsen

Auch für die numerische Berechnung von Linsensystemen ist die Matrixdarstellung (5) vorteilhaft und soll hier kurz beschrieben werden. Dabei ist es gleichgültig, um welche speziellen Linsen es sich handelt, wenn sie nur die Abbildungseigenschaften (2) haben. Es können also z. B. auch elektrische Vierpolfelder sein. Da die explizite Darstellung der charakteristischen Linsenelemente hier aber nur für rotationssymmetrische und ebene Felder dargestellt ist, bezieht sich das Folgende nur auf diese Linsen.

Ist z. B. für eine Einzellinse die Näherung nach Abb. 8 nicht ausreichend, so kann man den Verlauf des Achsenpotentials durch mehrere Segmente eines Polygonzuges besser annähern und muß nun die charakteristischen Linsenelemente für mehrere N -Werte numerisch ausrechnen. Beispiele hierfür findet man in der Arbeit von Gans. Eine solche genauere Berechnung der Einzellinse durch feinere Unterteilung der Integrationsschritte soll hier zunächst betrachtet werden (Abb. 15). Das Achsenpotential $\varphi(z)$ sei jetzt durch n Segmente angenähert. Jedes Segment verhält sich wie eine Einzellinse, wie sie im Abschnitt II, 2 behandelt wurde.

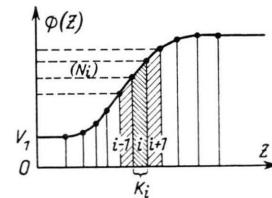


Abb. 15. Approximation des Achsenpotentials durch einen Polygonzug.

Man kann daher, nachdem man die Werte $N_1 \dots N_n$, $K_1 \dots K_n$ nach der Approximation festgelegt hat, zu jeder Einzellinse die charakteristischen Größen

$$\frac{F_a(N_i)}{K_i}, \frac{F_e(N_i)}{K_i}, \frac{(f_a f_e - F_a F_e)(N_i)}{K_i^2}, \frac{K_i}{f_a(N_i)}, i = 1 \dots n,$$

aus Abb. 9 oder einer entsprechenden Darstellung für die Schlitzlinse entnehmen, oder nach den Gln. (17) bzw. (35) berechnen und mit K_i multiplizieren. Sodann kann man die Matrizen

$$\mathfrak{U}_i = \frac{1}{f_a(N_i)} \begin{pmatrix} F_a(N_i) & \{f_a f_e - F_a F_e\}(N_i) \\ -1 & F_e(N_i) \end{pmatrix}, \quad i = 1 \dots n$$

bilden. Die gesamte Abbildungsmatrix \mathfrak{U} ist dann das Produkt

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_n \dots \mathfrak{U}_1 &= \frac{1}{\prod_i f_a(N_i)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= - \frac{a_{21}}{\prod_i f_a(N_i)} \begin{pmatrix} F_a & f_a f_e - F_a F_e \\ -1 & F_e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nachdem man also $-a_{21}$ ausgeklammert hat, erhält man direkt die charakteristischen Größen der Gesamtlinse F_a , F_e , $1/f_a$, $f_a f_e - F_a F_e$, bei dem gesamten Energiegewinn $N = \prod_{i=1}^n N_i$.

Ein Punkt bedarf dabei noch besonderer Begründung. Bei der Einzellinse nach Abb. 8 sollte stets ein feldfreier Raum, $\varphi' = 0$, folgen und vorangehen, während hier aber Felder $\varphi' = c_1, c_2, \dots \neq 0, 0, \dots$ aufeinander folgen. Es ist darum nicht selbstverständlich, daß man die Matrizen der Einzellinsen ohne weiteres miteinander multiplizieren darf. Man überzeugt sich aber leicht an Hand der Matrix (13), die die Integration über eine Ecke darstellt, daß man (13) in zwei Integrationsschritte aufteilen kann, von denen der erste nur bis $\varphi' = 0$ geht, während der zweite bei $\varphi' = 0$ anfängt. Es werde über die Ecke 1,2 integriert mit $\varphi'_1 = c_1$, $\varphi'_2 = c_2$:

$$(13) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c_1 - c_2}{4 q_{12}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c_2}{4 q_{12}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c_1}{4 q_{12}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation der Matrizen für die Einzellinsen war also erlaubt.

Als zweites Beispiel sei die Berechnung einer Hintereinanderschaltung mehrerer Linsen mit feldfreien Zwischenräumen angeführt, die einzeln wie in Abb. 8 approximiert werden (Abb. 16). Nachdem man die N_i und K_i der Einzellinsen festgelegt hat, wobei für die feldfreien Zwischenräume jeweils $N = 1$ zu setzen ist, verläuft die Berechnung der charakteristischen Elemente der Gesamtlinse genau so wie oben beschrieben. Dabei sind die Faktoren $f_a(N_i)$ nur für die Berechnung der Vergrößerung der Gesamtlinse erforderlich, sie können also gegebenenfalls weggelassen werden.

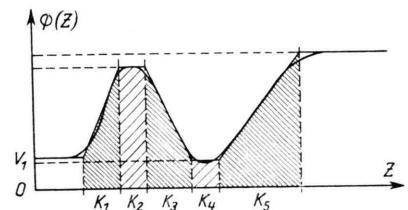


Abb. 16. Approximation des Achsenpotentials von drei hintereinandergeschalteten Linsen.

Man erkennt, daß die im Abschnitt II, 2 behandelte idealisierte Einzellinse gewissermaßen eine Elementarzelle darstellt, mit deren Hilfe man die charakteristischen Elemente aller anderen Linsen und Linsensysteme mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann.

Herrn Professor Dr. H. Neupert danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für zahlreiche Diskussionen zu diesem Thema.